Dane bibliograficzne o artykule: http://mieczyslaw_polonski.users.sggw.pl/mppublikacje

POSZUKIWANIE MAKSYMALNEJ LICZBY TERMINÓW WYKONANIA CZYNNOŚCI W HARMONOGRAMACH SIECIOWYCH

Mieczysław Połoński

Streszczenie. W pracy wyprowadzono wzory i przedstawiono dyskusję wyznaczania maksymalnej liczby terminów wykonania pojedynczej czynności oraz wszystkich czynności łącznie zawartych w harmonogramie sieciowym. Rozważono możliwość realizacji czynności bez przerw, jak również z podziałem na dwa etapy. Wyprowadzone wzory zastosowano do analizy prostej, sześciu czynnościowej sieci zależności. Wykazano, że liczba możliwych układów czynności w całym harmonogramie zależy w największym stopniu od terminu zakończenia całego przedsięwzięcia, zapasu całkowitego czasu poszczególnych czynności i liczby wszystkich czynności w sieci zależności. Uzyskane wyniki mają podstawowe znaczenie przy poszukiwaniem algorytmu analizy środków pozwalającego na połączenie okresu realizacji wszystkich czynności harmonogramu sieciowego z posiadanymi zasobami przy zachowaniu różnych uwarunkowań technologiczno-organizacyjnych.

Słowa kluczowe: harmonogram, harmonogram sieciowy, analiza zasobów, PERT, sieć zależności, zarządzanie projektami

WSTĘP

Realizacja każdego obiektu inżynierskiego powinna być poprzedzona sporządzeniem wiarygodnego harmonogramu przebiegu planowanych prac. Z chwilą wprowadzenia harmonogramów sieciowych do praktyki inżynierskiej [Połoński 2000] szybko stwierdzono, że oprócz analizy czasu konieczne jest wprowadzenie powiązania terminów wykonania poszczególnych czynności z dostępnością zasobów, jakie są zużywane w trakcie wykonania planowanych prac. Pierwszym etapem wprowadzanej analizy środków było przypisanie zapotrzebowania na zasoby dla czynności w harmonogramie i sporządzanie bilansu ich sumarycznego zapotrzebowania w kolejnych dniach realizacji obiektu na podstawie terminów wynikających z analizy czasu. Umożliwiało to porównanie planowanego zapotrzebowania na poszczególne zasoby z rozkładem ich dostępności, lecz nie zapewniało faktycznej dostępności wszystkich środków w planowanych terminach wykonania czynności. W związku z tym podjęto badania nad poszukiwaniem algorytmu analizy środków pozwalającego na połączenie okresu realizacji wszystkich czynności harmonogramu sieciowego z posiadanymi zasobami przy zachowaniu różnych uwarunkowań technologiczno-organizacyjnych [Połoński 1995].

Jednak problem analizy zasobów jest zagadnieniem bardzo złożonym i jak dotychczas nikomu nie udało się opracować optymalnego algorytmu rozwiązania tego zagadnienia, a te które istnieją są na tyle ogólne i ograniczone tak dużą liczbą założeń, że nie znajdują zastosowania przy rozwiązywaniu wielu praktycznych problemów. W związku z tym opracowano szereg algorytmów herystycznych, które nie zapewniają co prawda rozwiązania optymalnego ze względu na przyjęte kryterium, jednak pozwalają na modelowanie realizacji dowolnego przedsięwzięcia z uwzględnieniem wielu wymaganych ograniczeń przy zastosowaniu powszechnie dostępnych mikrokomputerów klasy PC. Oczywiście w takim przypadku natychmiast rodzi się pytanie o efektywność tych algorytmów.

Jednak, aby odpowiedzieć precyzyjnie na to pytanie trzeba znaleźć wzorzec, do którego można porównać uzyskiwane z różnych algorytmów rozwiązania. Oczywiście, najlepszym punktem odniesienia byłoby rozwiązanie optymalne. Niestety najczęściej tego rozwiązania nie znamy. Jednak w przypadku bardzo prostych harmonogramów sieciowych istnieje stosunkowo łatwy, chociaż bardzo czasochłonny, sposób wyznaczenia rozwiązania optymalnego. Wystarczy przeanalizować wszystkie możliwe w danym harmonogramie rozwiązania i wybrać najlepsze z nich. Odrębnym bardzo ciekawym pytaniem jest liczba równorzędnych, optymalnych rozwiązań – czy istnieje tylko jedno takie rozwiązanie czy istnieje ich więcej? Oczywiście, zaproponowane rozwiązanie jest mało „eleganckie" i ma bardzo ograniczone zastosowanie, jednak wydaje się, że na razie jest jedyne możliwe. Istnieje ewentualnie drugie, uproszczone rozwiązanie. Można ten sam harmonogram, z tymi samymi danymi dotyczącymi czasu i środków, rozwiązywać kilkoma różnymi algorytmami (programami obliczeniowymi) a uzyskane wyniki porównywać między sobą. W przypadku większych harmonogramów pozostaje to na razie jedyna możliwa droga postępowania, jednak nie prowadzi ona do wyznaczenia rozwiązania optymalnego.

Próbując znaleźć rozwiązanie optymalne należy zbudować algorytm, który przeanalizuje wszystkie możliwe w danym harmonogramie przypadki. Przystępując do konstruowania takiego algorytmu należy jednak najpierw wyznaczyć liczbę wszystkich możliwych rozwiązań.

MATERIAŁ I METODY

W tym celu rozważmy na początku przypadek najprostszy: harmonogram złożony tylko z jednej czynności. Zakładając, że czas trwania czynności jest liczbą naturalną (najczęściej dni robocze) przyjmijmy następujące oznaczenia:

T - łączny czas trwania prac na czynności, *L* - maksymalna liczba dni, w ciągu których należy wykonać czynność.

Rozpatrując ogólniejszy przypadek przyjmijmy, że czynność może być realizowana etapami tzn. w trakcie prac mogą wystąpić przerwy. Wprowadźmy dalsze oznaczenia:

i – numer kolejnego etapu,

n – liczba etapów, w ciągu których realizowana jest czynność; $i = 1.. n$ (gdy czynność wykonywana jest w jednym etapie $i = 1$),

t_i – czas wykonania *i* – tego etapu czynności.

Naturalnie, łączny czas realizacji czynności musi pozostać stały tzn.:

$$\sum_{i=1}^{n} t_i = T$$

m – liczba przerw w trakcie wykonania czynności ($m = n - 1$),

j – numer kolejnej przerwy w trakcie wykonania czynności ($j = 0....n - 1$), (gdy czynność wykonywana jest w jednym etapie $j = 0$),

p_j – czas *j-tej* przerwy,

P – łączny czas przerw.

Zauważamy, że $m < T$ a łączny czas przerw P

$$P = \sum_{j=0}^{n-1} p_j$$

τ – czas realizacji czynności razem z przerwami ($\tau = T+P$),

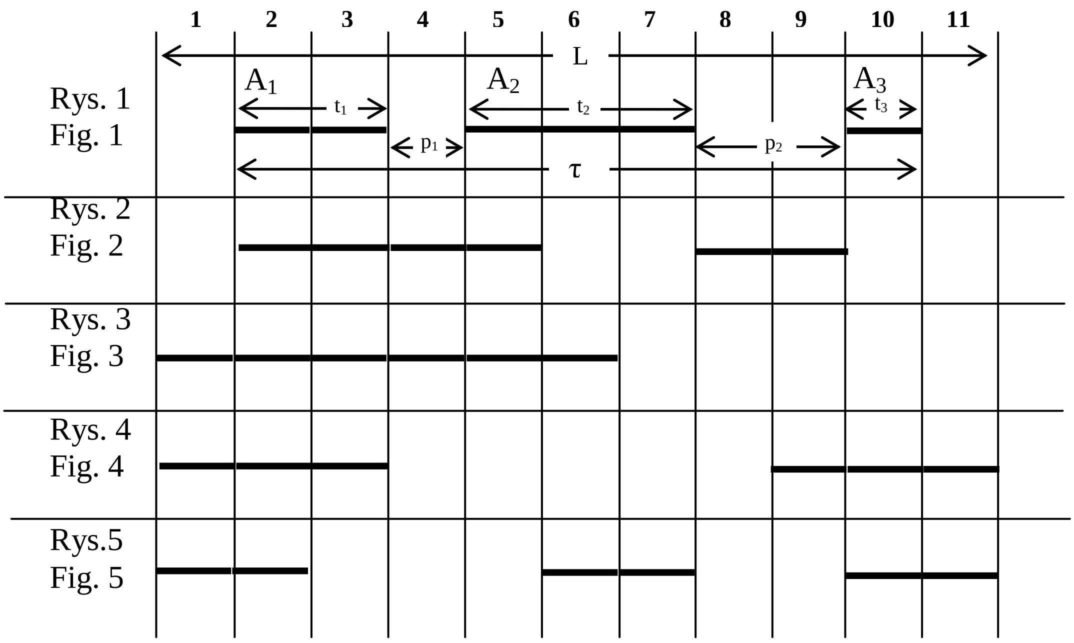
A_i – numer dnia, w którym rozpoczyna się wykonanie *i* – tego etapu czynności.

Jeśli rozwiązanie ma dotyczyć rzeczywistych czynności muszą być spełnione następujące warunki:

- Czas pracy efektywnej nie może być dłuższy niż czas trwania czynności z przerwami tzn. $T \leq \tau$
- Czas trwania czynności z przerwami nie może być dłuższy od maksymalnej liczby dni, w ciągu których należy wykonać czynność tzn. $\tau \leq L$
- Efektywny czas trwania czynności musi być większy od zera tzn. $T > 0$
- Czas realizacji każdego etapu czynności musi być większy od zera tzn. $t_i > 0$ dla $i = 1...n$
- Czas trwania pojedynczego etapu nie może być dłuższy od efektywnego czasu trwania całej czynności tzn. $t_i \leq T$ dla $i = 1.... n$

- Łączny czas prac nie może być większy od maksymalnej liczby dni przeznaczonych na wykonanie czynności pomniejszony o efektywny czas pracy tzn. $P \leq (L\text{-}T)$

Zakładając, że T = 6, L = 11, m = 2 poniżej (rys 1..5) przedstawiono kilka przykładowych, możliwych sposobów wykonania tej czynności



Rys. 1..5 Przykładowe terminy wykonania czynności

Fig. 1..5 Exemplary task’s realization time – limit

Odnosząc powyższe rozważania do harmonogramów sieciowych bardzo łatwo wyznaczyć żądane do obliczeń parametry [Połoński 2000]. Czas efektywnej pracy T każda czynność ma określony, liczbą etapów wykonania czynności n narzuca projektant harmonogramu (przy czym najczęściej n waha się w granicach 1-3) a maksymalną liczbę dni w czasie których należy wykonać czynność można obliczyć jako

$$L = T + Z_c$$

gdzie Z_c oznacza zapas całkowity czasu wyznaczony każdej czynności na podstawie obliczeń analizy czasu. Pozostaje pytanie o maksymalną liczbę warunków realizacji tej czynności.

Oznaczając W_m liczbę wariantów, w jakich może być wykonana pojedyncza czynność przy założeniu m przerw w trakcie jej realizacji rozpatrzmy kolejno następujące przypadki.

I. Realizacja czynności bez przerw (m = 0)

$$W_0 = (L – T + 1)$$

a więc np. czynność o czasie 3, która musi być wykonana w jednym etapie w ciągu maksymalnie 6 okresów czasu może być zrealizowana w czterech wariantach

$W_0 = (6 – 3 + 1) = 4$.

Łatwo zauważyć, że warianty te przedstawiają się w następujący sposób:

$A_1 = 1$, dni realizacji czynności to 1, 2, 3,

$A_2 = 2$, dni realizacji czynności to 2, 3, 4,

$A_3 = 3$, dni realizacji czynności to 3, 4, 5,

$A_4 = 4$, dni realizacji czynności to 4, 5, 6.

II. Realizacja czynności z jedną obowiązkową przerwą (m = 1)

Zakładając, że poszukujemy liczby wariantów realizacji czynności z jedną obowiązkową przerwą, ale bez rozróżniania jej długości ($P = 1$; $p_1 = 1$) liczba wariantów

$$W_1' = (T-1)(L-T)$$

gdyż czynność można podzielić na T-1 sposobów, a ilość terminów, w których może się ona rozpocząć, aby zakończyć nie później niż L-tego dnia wynosi (L-(T+P) +1) = (L-T). Tzn., że np. czynność o parametrach L = 8, T = 6, P = 1 może być wykonana na

$W_1' = (6-1)8-6) = 10$ sposobów.

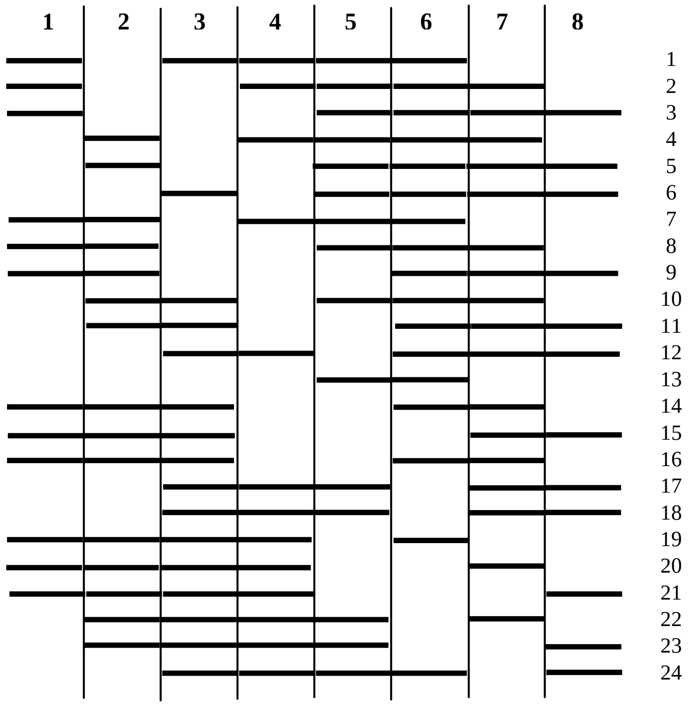
Rozróżnienie długości przerw ($P \geq 1$; $P = L-T$) komplikuje obliczenia. Można jednak zauważyć, że czynność można rozpoczynać kolejno od pierwszego dnia do ostatniego wynoszącego (L-T). Maksymalna długość przerwy w zależności od dnia rozpoczęcia wynosi P-1, P-2,..,1. Ponadto czynność można dzielić na (T-1) sposobów. Wynika z tego, że maksymalna liczba wariantów w tym wypadku wynosi:

$$W_1 = (L-T)(T-1) + (L-T-1)(T-1) + ... 1(T-1) = (T-1)((L-T) + (L-T-1) + ...1) =$$
$$= (T-1)(1+2+3+....(L-T)$$

Np. dla czynności o długości T = 5, która mysi być wykona w ciągu L = 8 dni maksymalna długość przerwy (czyli łączny czas przerw w ogólniejszym przypadku) P = L-P = 8-5=3, wówczas

$W_1 = (1+2+3)(5-1) = 24$.

Poniżej na rys. 6 zestawiono w postaci harmonogramu liniowego wszystkie 24 możliwe sposoby wykonania tej czynności.



Rys. 6. Zestawienie wszystkich możliwych terminów wykonania czynności

Fig. 6. Comparison of all possible task realization time – limits

Ostatecznie łączna maksymalne liczba wariantów wykonania jednej czynności bez podziału oraz z podziałem na dwa etapy wynosi

$$W_{01} = W_0 + W_1 = (L - T + 1) + (1+2+3+\dots (L-T))(T-1) =$$

$$= (L - T + 1) + \frac{(L-T)(L-T+1)}{2}(T-1) = (L-T+1)\left(1 + \frac{(L-T)(T-1)}{2}\right)$$

Kontynuując rozważania dla przykładowej czynności o parametrach T = 5, L = 8 łączna liczba możliwych wariantów jej wykonania wynosi

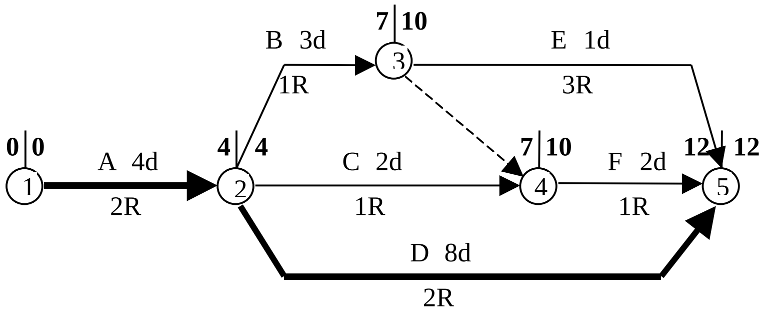
$$W_{01} = (8 - 5 + 1)\left(1 + \frac{(8-5)(5-1)}{2}\right) = 4 \cdot 7 = 28$$

Znając liczbę wariantów wykonania pojedynczej czynności można wyznaczyć maksymalna liczbę wariantów wykonania harmonogramu sieciowego HW_m złożonego z K czynności rzeczywistych (o czasach trwania T>0) i m przerwach w trakcie wykonywania czynności.

$$HW_m = \prod_{k=1}^{K} W_k$$

WYNIKI I DYSKUSJA

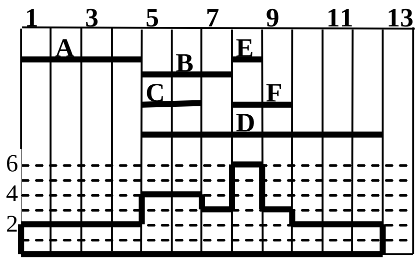
Na rysunku 7 przedstawiono przykład bardzo prostej sieci o sześciu czynnościach rzeczywistych i jednej czynności zerowej.



Rys. 7. Schemat harmonogramu sieciowego

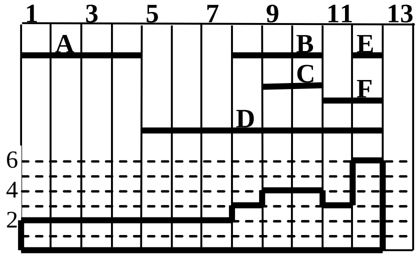
Fig. 7. Network schedule's draft

Czasy trwania poszczególnych czynności w dniach podano nad strzałką, a liczbę środków potrzebnych do jej wykonania – pod strzałką. Znając najwcześniejsze i najpóźniejsze terminy zaistnienia zdarzeń, można obliczyć najwcześniejsze i najpóźniejsze terminy dla czynności. Terminy najwcześniejsze i najpóźniejsze wyznaczają skrajne położenie każdej czynności. Przedstawiono je w tabeli 1 oraz w postaci harmonogramów liniowych na rysunku 8 i 9. Jak wynika z obliczeń, ścieżka krytyczna przebiega przez zdarzenia 1, 2, 5, tzn. że na ścieżce krytycznej leżą czynności A i D. Te czynności będą możliwe do wykonania tylko w jednym wariancie.



Rys. 8. Układ czynności i wykres sumowy środków wg terminów najwcześniejszych analizy czasu

Fig. 8. The earliest time – limit realization of task and chart of summary resources



Rys. 9. Układ czynności i wykres sumowy środków wg terminów najpóźniejszych analizy czasu

Fig. 9. The latest time – limit realization of task and chart of summary resources

Tabela 1. Terminy wykonania czynności, zapasy czasu sieci zależności oraz liczba wariantów wykonania czynności
Table 1. Task realization time – limit, time slack of chart schedule and number of variant of task realization

ZP	ZN	T	NWP	NWK	NPP	NPK	ZC	L=T+ZC	L-T+1	L-T	T-1	W_0	W_1	W_{01}
1	2	4	0	4	0	4	0	4	1	0	3	1	0	1
2	3	3	4	7	7	10	3	6	4	3	2	4	12	16
2	4	2	4	6	8	10	4	6	5	4	1	5	10	15
2	5	8	4	12	4	12	0	8	1	0	7	1	0	1
3	5	1	7	8	11	12	4	5	5	4	0	5	0	5
4	5	2	7	9	10	12	3	5	4	3	1	4	6	10

Łącznie:
Summary: 400 12 000

W tabeli 1 przedstawiono obliczenia wariantów realizacji każdej czynności: bez podziału W_0, z jednym podziałem W_1 oraz łącznie W_{01}. Jak widać, łączna liczba wariantów realizacji wszystkich czynności w harmonogramie bez podziału HW_0 wynosi 400 a z jednym podziałem HW_{01} 12000.

Załóżmy jednak, że modelowane przedsięwzięcie może być opóźnione o jeden lub dwa dni. Obliczenia wyglądałyby wówczas następująco:

Przy opóźnieniu o jeden dzień:

Tabela 1. Terminy wykonania czynności, zapasy czasu sieci zależności zwiększone o 1 oraz liczba wariantów wykonania czynności
Table 1. Task realization time – limit, time slack of chart schedule increased of 1and number of variant of task realization

ZP	ZN	T	NWP	NWK	NPP	NPK	ZC+1	L=T+ZC	L-T+1	L-T	T-1	W_0	W_1	W_{01}
1	2	4	0	4	0	4	1	5	2	1	3	2	3	5
2	3	3	4	7	7	10	4	7	5	4	2	5	20	25
2	4	2	4	6	8	10	5	7	6	5	1	6	15	21
2	5	8	4	12	4	12	1	9	2	1	7	2	7	9
3	5	1	7	8	11	12	5	6	6	5	0	6	0	6
4	5	2	7	9	10	12	4	6	5	4	1	5	10	15

Łącznie:
Summary: 3600 2 126 250

Przy opóźnieniu o dwa dni:

Tabela 1. Terminy wykonania czynności, zapasy czasu sieci zależności zwiększone o 2 oraz liczba wariantów wykonania czynności
Table 1. Task realization time – limit, time slack of chart schedule increased of 2 and number of variant of task realization

ZP	ZN	T	NWP	NWK	NPP	NPK	ZC+2	L=T+ZC	L-T+1	L-T	T-1	W_0	W_1	W_{01}
1	2	4	0	4	0	4	2	6	3	2	3	3	9	12
2	3	3	4	7	7	10	5	8	6	5	2	6	30	36
2	4	2	4	6	8	10	6	8	7	6	1	7	21	28
2	5	8	4	12	4	12	2	10	3	2	7	3	21	24
3	5	1	7	8	11	12	6	7	7	6	0	7	0	7
4	5	2	7	9	10	12	5	7	6	5	1	6	15	21
											Łącznie: Summary:	15876		42674688

PODSUMOWANIE

Jak wynika z przeprowadzonej analizy liczba możliwych wariantów zależy w dużej mierze od liczby czynności w sieci zależności oraz gwałtownie rośnie ze wzrostem zapasów całkowitych czasu tych czynności. W analizowanym przykładzie rozważano przypadek harmonogramu o sześciu czynnościach. Harmonogramy używane w praktyce inżynierskiej liczą najczęściej około 100 do 300 czynności, czasami przekraczają 1000. Terminy realizacji całości robót w dniach roboczych to często 150 – 500 dni, zapasy całkowite czasu poszczególnych czynności wynoszą kilka do kilkudziesięciu dni.

Wynika z tego, że próba znalezienia rozwiązania optymalnego analizy środków drogą przeszukiwania wszystkich możliwych rozwiązań może być stosowana jedynie w odniesieniu do bardzo prostych harmonogramów sieciowych i będzie wymagała bardzo wydajnego komputera. Na szczęście z praktycznego punktu widzenia najczęściej poszukiwane jest rozwiązanie bez podziału czynności na etapy, co jak wynika z przeprowadzonych obliczeń znacznie ogranicza liczbę możliwych wariantów układu czynności.

PIŚMIENNICTWO

Czechowski T., 1968. Elementarny wykład rachunku prawdopodobieństwa. PWN Warszawa.

Leitner R., Żakowski W., 1972. Matematyka Część II. Wydawnictwa Naukowo – Techniczne Warszawa.

Połoński M., 1995. Planowanie realizacji inwestycji melioracyjnych SGGW funkcji czasu SGGW środków na podstawie harmonogramów sieciowych. Wydawnictwo SGGW Warszawa.

Połoński M., 2001. Harmonogramy sieciowe w robotach inżynierskich. Wydawnictwo SGGW Warszawa.

REASERCHES OF MAXIMUM NUMBER OF TASKS REALIZATION TIME – LIMIT IN THE NETWORK SCHEDULE

Abstract. The aim of study was to estimate and discus the maximum number of single task realization and of all tasks contained in a network schedule time - limit. In this paper it is considered task realization in one or two stages. Educated formula was used to analyse very simple network schedule created from six tasks. In the second part of article it was proved that the number of possible task structures in the whole schedule depends mostly on the deadline realization time of enterprise, whole time slack in each task and on the number of all tasks in chart schedule. Obtained results have basic meaning while looking for an algorithm of medium analysis which enables to connect all task network schedule realization period with available sources while keeping various technologic and organization condition.

Key words: schedule, network schedule, resource analysis, PERT, chart schedule, project management

Author's address: M. Połoński,Warsaw Agricultural Uniwersity –SGGW, 02-787 Warszawa, ul. Nowoursynowska 166 Poland, Katedra Goinżynierii, Email: mieczyslaw_polonski@sggw.pl